第７講　周期関数について…

7　次の各問いに答えよ．

　ただし，$f(x)$ の基本周期とは，関数 $f(x)$ において $f(x+p)=f(x)$ が任意の実数 x に対して成り立つような 0 以外の定数 p のうち正の最小の値をいう．

(1)　$f(x)=2\sin(3x-\pi)+1$ とするとき，関数 $f(x)$ の基本周期を求め，$y=f(x)$ のグラフをかけ．

(2)　周期が 1，すなわち $f(x+1)=f(x)$ を満たす関数 $f(x)$ を 3 つ挙げよ．ただし，$f(x)$ は定数関数でないものとする．

(3)　関数 $f(x)$ の周期が 2 で，$-1 \leqq x \leqq 1$ のとき $f(x)=|x|$ であるとする．このとき $y=xf(x)$ のグラフを $-1 \leqq x \leqq 3$ の範囲でかけ．

(4)　関数 $f(x)=\sin x^2$ は周期関数か否か．周期関数ならばそれを示し，基本周期を求めよ．また，周期関数でないならば，それを示せ．

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第７講　周期関数について…

7　次の各問いに答えよ．

(1)　$f(x)=\sin^3 x-\dfrac{3}{4}\sin x$ の基本周期が $\dfrac{2}{3}\pi$ であることを示せ．

(2)　関数 $y=f(x)$ $(-\infty<x<\infty)$ が p を周期とする周期関数であり，さらに定数 M に対し $|f(x)|\leqq M$ $(0\leqq x\leqq p)$ を満たしていれば，すべての実数 x について $|f(x)|\leqq M$ が成り立つことを示せ．

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第７講　周期関数について…

7　次の各問いに答えよ．

ただし，$f(x)$ の基本周期とは，関数 $f(x)$ において $f(x+p)=f(x)$ が任意の実数 x に対して成り立つような 0 以外の定数 p のうち正の最小の値をいう．

(1)　$f(x)=2\sin(3x-\pi)+1$ とするとき，関数 $f(x)$ の基本周期を求め，$y=f(x)$ のグラフをかけ．

(2)　周期が 1，すなわち $f(x+1)=f(x)$ を満たす関数 $f(x)$ を 3 つ挙げよ．ただし，$f(x)$ は定数関数でないものとする．

(3)　関数 $f(x)$ の周期が 2 で，$-1\leqq x\leqq 1$ のとき $f(x)=|x|$ であるとする．このとき $y=xf(x)$ のグラフを $-1\leqq x\leqq 3$ の範囲でかけ．

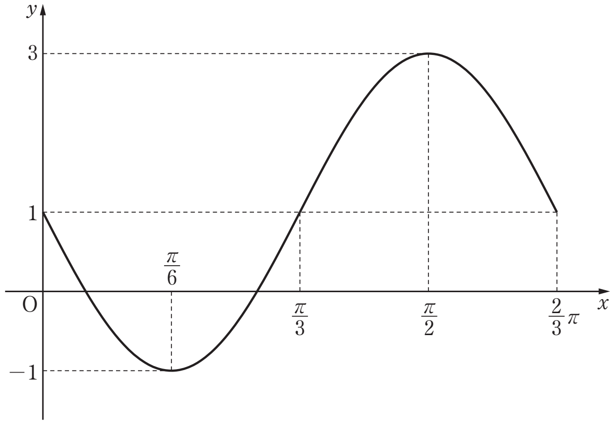
(4)　関数 $f(x)=\sin x^2$ は周期関数か否か．周期関数ならばそれを示し，基本周期を求めよ．また，周期関数でないならば，それを示せ．

【答】　(1) 基本周期は $\frac{2}{3}\pi$　(2)〈例〉$\sin 2\pi x$，$\tan \pi x$，$x-[x]$　(3) 略　(4) 略

【解答】

(1)　$f(x)=2\sin 3\left(x-\frac{\pi}{3}\right)+1$ より，$f(x)$ の基本周期は $\boldsymbol{\frac{2}{3}\pi}$ である．また，$y=f(x)$ のグラフは $y=2\sin 3x$ のグラフを x 軸方向に $+\frac{\pi}{3}$，y 軸方向に $+1$ だけ平行移動したもの．

よって，1 周期分のグラフをかくと下図のようになる．



(2)　$f(x)=\boldsymbol{\sin 2\pi x}$ とすると，$f(x+1)=\sin 2\pi(x+1)=\sin(2\pi x+2\pi)=\sin 2\pi x=f(x)$ であり，確かに周期は 1 となる．

$f(x)=\boldsymbol{\tan \pi x}$ とすると，$f(x+1)=\tan\pi(x+1)=\tan(\pi x+\pi)=\tan \pi x=f(x)$ であり，確かに周期は 1 となる．

x 以下の最大整数を $[x]$ で表し $f(x)=\boldsymbol{x-[x]}$ とすると，$f(x+1)=(x+1)-[x+1]$ $=x+1-([x]+1)=x-[x]=f(x)$ であり，確かに周期は 1 となる．

(3)　$f(x)=|x|$ $(-1\leqq x\leqq 1)$ より $f(x-2)=|x-2|$ $(-1\leqq x-2\leqq 1)$，さらに周期が 2 より $f(x)=|x-2|$ $(1\leqq x\leqq 3)$ となるので

ⒸRECRUIT HOLDINGS

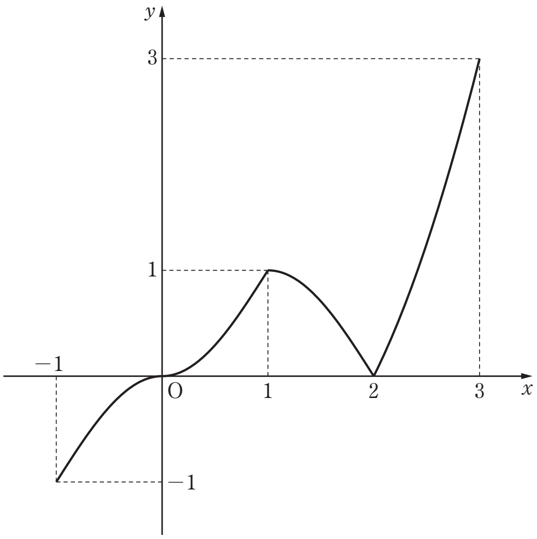
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

$$f(x)=\begin{cases}|x| & (-1\leqq x<1)\\ |x-2| & (1\leqq x\leqq 3)\end{cases}=\begin{cases}-x & (-1\leqq x<0)\\ x & (0\leqq x<1)\\ -x+2 & (1\leqq x<2)\\ x-2 & (2\leqq x\leqq 3)\end{cases}$$

よって

$$xf(x)=\begin{cases}-x^2 & (-1\leqq x<0)\\ x^2 & (0\leqq x<1)\\ -x(x-2) & (1\leqq x<2)\\ x(x-2) & (2\leqq x\leqq 3)\end{cases}$$

となるので，$y=xf(x)$ のグラフは下図.



(4)　$f(x)$ が周期関数で，その周期が $p(\neq 0)$ であるとすると，$f(x+p)=f(x)$ すなわち $\sin(x+p)^2=\sin x^2$ が任意の実数 x について成り立つ.

ここで $x=0$ とすると $\sin p^2=0$ となるが，$p^2\geqq 0$ で $p\neq 0$ より $p^2=k\pi$ （k は自然数）となる.

また，$\sin(x+p)^2=\sin x^2$ すなわち $\sin(x+p)^2-\sin x^2=0$ であるから

$2\cos\left(x^2+px+\dfrac{p^2}{2}\right)\sin\left(px+\dfrac{p^2}{2}\right)=0$ が任意の実数 x について成り立つことになる.

$x=\dfrac{1}{2p}$ とすると，$px+\dfrac{p^2}{2}=\dfrac{1}{2}+\dfrac{p^2}{2}$，$x^2+px+\dfrac{p^2}{2}=\dfrac{1}{4p^2}+\dfrac{1}{2}+\dfrac{p^2}{2}$ となるが，

$\dfrac{p^2}{2}=\dfrac{k\pi}{2}$，$0<\dfrac{1}{2}<\dfrac{\pi}{6}$，$0<\dfrac{1}{4p^2}=\dfrac{1}{4k\pi}<\dfrac{1}{4}<\dfrac{\pi}{12}$ より $\dfrac{k\pi}{2}<px+\dfrac{p^2}{2}<\dfrac{k\pi}{2}+\dfrac{\pi}{6}$，

$\dfrac{k\pi}{2}<x^2+px+\dfrac{p^2}{2}<\dfrac{k\pi}{2}+\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{\pi}{12}=\dfrac{k\pi}{2}+\dfrac{\pi}{4}$ となるので

$$\cos\left(x^2+px+\frac{p^2}{2}\right)\sin\left(px+\frac{p^2}{2}\right)\neq 0$$

よって，$f(x)$ は周期関数ではない.

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第７講　周期関数について…

7　次の各問いに答えよ.

(1)　$f(x)=\sin^3 x-\dfrac{3}{4}\sin x$ の基本周期が $\dfrac{2}{3}\pi$ であることを示せ.

(2)　関数 $y=f(x)$ $(-\infty<x<\infty)$ が p を周期とする周期関数であり，さらに定数 M に対し $|f(x)|\leqq M$ $(0\leqq x\leqq p)$ を満たしていれば，すべての実数 x について $|f(x)|\leqq M$ が成り立つことを示せ.

【答】 略

【解答】

(1)　$f(x)=-\dfrac{1}{4}(3\sin x-4\sin^3 x)=-\dfrac{1}{4}\sin 3x$ である.

$$f(x+p)-f(x)=-\frac{1}{4}\sin 3(x+p)-\left(-\frac{1}{4}\sin 3x\right)$$
$$=-\frac{1}{4}\{\sin 3(x+p)-\sin 3x\}$$
$$=-\frac{1}{4}\cdot 2\cos\left(3x+\frac{3p}{2}\right)\sin\frac{3p}{2}$$

上記の式が，任意の x に関して恒等的に 0 になるような p が周期であるが，x が任意の値をとるため $\cos\left(3x+\dfrac{3p}{2}\right)$ は恒等的に 0 にはならない．よって

$$\sin\frac{3p}{2}=0 \quad p\neq 0 \text{ より } \frac{3p}{2}=k\pi \ (k \text{ は 0 以外の整数})$$
$$\therefore \quad p=\frac{2k}{3}\pi \quad (k \text{ は 0 以外の整数})$$

周期の中で，正の最小のものが基本周期なので，$k=1$ として基本周期は $\dfrac{2}{3}\pi$ となる.

(2)　ある実数 x_0 について

$$|f(x_0)|>M$$

であるとする.

0 でない整数 k に対して

$$x+kp=x_0 \quad (0\leqq x\leqq p)$$

となる k，x が存在するが，p が周期なら $f(x+kp)=f(x)$ であるから

$$|f(x_0)|=|f(x+kp)|=|f(x)|>M$$

となり，$|f(x)|\leqq M$ に矛盾する.

よって $|f(x)|\leqq M$ $(0\leqq x\leqq p)$ ならば，すべての実数 x について $|f(x)|\leqq M$ である.

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。